Β΄ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ

ΜΚΔ & ΕΚΠ

9. Αν $(\alpha,\beta)=1$, ΝΔΟ
 i. $(\alpha+\beta,\alpha\beta)=1$
 & ii. $(\alpha^2+\beta^2,\alpha\beta)=1$

10. ΝΔΟ
$(\alpha,\beta\gamma)=1$ αν_ν $(\alpha,\beta)=(\alpha,\gamma)=1$

1. Αν $(\alpha,\beta)=1$, να αποδείξετε ότι:
 (i) $(\alpha+\beta,\ \alpha-\beta)=1$ ή 2 (ii) $(2\alpha+\beta,\ \alpha+2\beta)=1$ ή 3.

2. Αν $(\alpha,4)=2$ και $(\beta,4)=2$, να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta,\ 4)=4$.

3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι ν, για τους οποίους το κλάσμα $\frac{2\nu+3}{5\nu+7}$ απλοποιείται.

4. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

5. Ένας μαθητής στην προσπάθειά του να βρει το Μ.Κ.Δ. τριών ακεραίων α,β,γ βρήκε:
 $(\alpha,\beta)=9$, $(\beta,\gamma)=30$ και $(\gamma,\alpha)=12$.
 Μπορείτε να απαντήσετε αν έκανε ή όχι λάθος;

6. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ με $(\alpha,\beta)=\delta$. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\kappa,\lambda\in\mathbf{Z}$ για τους οποίους ισχύει $\delta=\kappa\alpha+\lambda\beta$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

7. Έστω $\alpha,\beta,\kappa\in\mathbf{N}^*$ με $(\alpha,\kappa)=1$. Να αποδείξετε ότι
 (i) $(\alpha,\kappa\beta)=(\alpha,\beta)$ (ii) $[\alpha,\kappa\beta]=\kappa[\alpha,\beta]$.

11. έστω α,β φυσικοί(εκτός του 0) και p θετικός πρώτος. Αν $(\alpha,p^2)=p$ και $(\alpha,p^3)=p^2$. Να βρέιτε τον $(\alpha\beta,p^4)$ και τον αριθμό $(\alpha+\beta,p^4)$.

8. Έστω $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $[\alpha\gamma,\beta\gamma,\alpha\delta,\beta\delta]=[\alpha,\beta]\cdot[\gamma,\delta]$.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (ΕΚΠ) & (ΜΚΔ) Β΄ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ

1) i. Έστω ότι $\delta=(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$:
Τότε, $\delta\mid\alpha+\beta$ και $\delta\mid\alpha-\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta\mid[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]\Rightarrow\delta\mid 2\beta$
και $\delta\mid[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]\Rightarrow\delta\mid 2\alpha$
$\Rightarrow \delta\mid(2\alpha,2\beta)=2\cdot(\alpha,\beta)\Rightarrow$
$\Rightarrow \delta\mid 2\Rightarrow \begin{cases}\delta=1\\ \text{ή}\\ \delta=2\end{cases}$

ii. Έστω $\delta'=(2\alpha+\beta,\alpha+2\beta)$.
Τότε, $\delta\mid[2(2\alpha+\beta)-(\alpha+2\beta)]=3\alpha$
και $\delta\mid[2(\alpha+2\beta)-(2\alpha+\beta)]=3\alpha$
$\Rightarrow\delta\mid(3\alpha,3\beta)=3(\alpha,\beta)$
$\Rightarrow\delta\mid 3\Rightarrow\begin{cases}\delta=1\\ \text{ή}\\ \delta=3\end{cases}$

2) $(\alpha,4)=2 \rightsquigarrow$ Δηλ. το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 4 είναι ίσο με 2.

Επομένως, $\alpha=4k+2,\ k\in\mathbb{Z}$

$(\beta,4)=2 \rightsquigarrow$ όμοια για τον ίδιο λόγο:
$\beta=4\lambda+2,\ \lambda\in\mathbb{Z}$

$\alpha+\beta=4k+4\lambda+4=4(k+\lambda+1),\ k,\lambda\in\mathbb{Z}$

Άρα, $(\alpha+\beta,4)=(4(k+\lambda+1),4)=4\underbrace{(k+\lambda+1,1)}_{1}=4$.

3) Για να απλοποιείται το κλάσμα αρκεί ο ΜΚΔ των όρων του να είναι διαφορετικός της μονάδας (ή το κλάσμα να μην είναι ανάγωγο). Έστω $\delta=(2\nu+3,5\nu+7)$ τότε $\delta|2\nu+3$ και $\delta|5\nu+7 \Rightarrow \delta|[5(2\nu+3)-2(5\nu+7)] \Rightarrow$
$\Rightarrow \delta|1 \Rightarrow \delta=1$. Άρα, το κλάσμα $\frac{2\nu+3}{5\nu+7}$ είναι ανάγωγο για όλες τις τιμές του $\nu\in\mathbb{N}^*$

4) $(\Rightarrow)$: Έστω $(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]=x$

$$\left.\begin{array}{l}\text{τότε } x|\alpha \text{ και } x|\beta \ (\leftarrow \text{ΜΚΔ})\\ \text{αλλά } \alpha|x \text{ και } \beta|x \ (\leftarrow \text{ΕΚΠ})\end{array}\right\}\ \boxed{\alpha=\beta}$$

$(\Leftarrow)$: Έστω $\alpha=\beta$, τότε $(\alpha,\beta)=(\alpha,\alpha)=\alpha$
και $[\alpha,\beta]=[\alpha,\alpha]=\alpha \Rightarrow (\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]$

5) $(\alpha,\beta)=3^2$, $(\beta,\gamma)=2\cdot3\cdot5$ και $(\gamma,\alpha)=2^2\cdot3$

$$\begin{array}{cc}(\beta,\gamma)=2\cdot3\cdot5 & (\gamma,\alpha)=2^2\cdot3\\ \downarrow & \downarrow\\ 2|\beta & 2|\alpha\end{array}$$

Άρα, $2|(\alpha,\beta)=3^2$. Άτοπο. Άρα, έχει κάνει λάθος

6) $\delta = k\alpha + \lambda\beta \Rightarrow k\cdot\overset{A}{\widetilde{\frac{\alpha}{\delta}}} + \lambda\cdot\overset{B}{\widetilde{\frac{\beta}{\delta}}} = 1 \Rightarrow k\cdot A + \lambda B = 1$

Απο, Θεωρία οι $k, \lambda \in \mathbb{Z}$ πρώτοι μεταξύ τους
ή αλλιώς πρώτοι προς αλλήλους

7) i. Εστω $\delta = (\alpha, \beta)$ και $\delta' = (\alpha, k\beta)$

$$\begin{cases} \delta \mid \alpha \\ \delta \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \mid \alpha \\ \delta \mid k\beta \end{cases} \Rightarrow \delta \mid (\alpha, k\beta) = \delta' \Rightarrow \delta \mid \delta' \quad (1)$$

Λόγω, οτι $(\alpha, k) = 1 \Rightarrow (\exists \mu, \nu \in \mathbb{Z}) : \mu\alpha + \nu k = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu\alpha\beta + \nu k\beta = \beta \Rightarrow \begin{cases} \delta' \mid \alpha \\ \delta' \mid k\beta \end{cases} \Rightarrow \delta' \mid (\mu\alpha\beta + \nu k\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta' \mid \beta \Rightarrow \begin{cases} \delta' \mid \alpha \\ \delta' \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \delta' \mid (\alpha, \beta) = \delta \Rightarrow \delta' \mid \delta \quad (2)$$

Απο (1), (2) $\rightsquigarrow (\alpha, k\beta) = (\alpha, \beta)$

ii. $$[\alpha, k\beta] = \frac{|\alpha|\cdot|k||\beta|}{(\alpha, k\beta)} \overset{(1)}{=} \frac{\alpha k\beta}{(\alpha, \beta)} = k[\alpha, \beta]$$

8) $$[\alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\delta, \beta\delta] = [[\alpha\gamma, \beta\gamma], [\alpha\delta, \beta\delta]] = [\gamma[\alpha, \beta], \delta[\alpha, \beta]] =$$
$$= [\alpha, \beta]\cdot[\gamma, \delta]$$

9) i. Έστω οτι $(\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta) > 1$.

Τότε το $(\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta)$ θα έχει εναν τουλάχιστον θετικό πρώτο διαιρέτη, έστω αυτός ρ. Δηλαδη,

$$\begin{cases} \rho \mid (\alpha+\beta) \\ \rho \mid \alpha\cdot\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho \mid \alpha+\beta \\ \rho \mid \alpha \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \rho \mid \alpha+\beta \\ \rho \mid \beta \end{cases} \Rightarrow \rho \mid (\alpha, \beta) = 1$$

Ατοπο.

ii. Ομοίως

10) $(\Rightarrow)$: Έστω $(\alpha,\beta\gamma)=1$

Υποθέτουμε ότι $(\alpha,\beta)>1 \Rightarrow (\exists \rho$ πρώτος$)$: $\begin{cases} \rho \mid \alpha \\ \rho \mid \beta \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \rho \mid \alpha \\ \rho \mid \beta\gamma \end{cases} \Rightarrow \rho \mid (\alpha,\beta\gamma)=1 \Rightarrow$ Άτοπο.

Ομοίως και το $(\alpha,\gamma)=1$.

$(\Leftarrow)$: Έστω $(\alpha,\beta)=(\alpha,\gamma)=1$

Υποθέτουμε $(\alpha,\beta\gamma)>1 \Rightarrow (\exists \rho$ πρώτος$)$: $\begin{cases} \rho \mid \alpha \\ \rho \mid \beta\gamma \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \rho \mid \alpha \\ \rho \mid \beta \end{cases}$ ή $\begin{cases} \rho \mid \alpha \\ \rho \mid \gamma \end{cases} \Rightarrow \rho \mid (\alpha,\beta)$ ή $\rho \mid (\alpha,\gamma) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho \mid 1$ Άτοπο.

11) Έστω $(\alpha,p^2)=p$ & $(\alpha,p^3)=p^2$

Άρα, οι ακέραιοι α,β είναι μορφής

$\alpha=p\cdot A$ με $p\nmid A$ και $\beta=p^2\cdot B$ με $p\nmid B$ (1)

Έτσι, έχουμε:

- $(\alpha\beta,p^4)=(p^3AB,p^2)=p^3(AB,p)\overset{(1)}{=}p^3\cdot 1=p^3$
  αφού $p\nmid AB$
- $(\alpha+\beta,p^4)=(pA+p^2B,p^4)=p(A+pB,p^3)=p\cdot 1=p$
  αφού $p\nmid (A+pB)$